Ejercicios Resueltos Combinatoria

1. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

Nótese que **importa el orden** en que se sienten las personas, ya que los cuatro sitios son diferentes, y que **una persona no puede ocupar más de un sitio a la vez**. Por lo tanto, hay

$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ maneras.

2. En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 3 premios. Averiguar de cuántos modos puede hacerse si:

1. los premios son diferentes.
2. los premios son iguales.

Hay dos supuestos posibles: Si una misma persona no puede recibir más de un premio:

- Suponemos que **NO** puede recibir más de un premio, luego los alumnos **NO** se pueden repetir:

Caso1: Los premios son diferentes (no es lo mismo ganar el primer premio que el segundo) **importa el orden**, hay

$V_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ maneras de distribuir los premios si estos son diferentes;

Caso2: Los premios son iguales, no importa el orden, son indistinguibles, pueden distribuirse de

$C_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ maneras de distribuir los premios si estos son iguales.

- Si un mismo alumno puede recibir mas de un premio luego los alumnos **se pueden repetir**:

Caso1: Los premios son diferentes (no es lo mismo ganar el primer premio que el segundo) **importa el orden**, hay

$VR_{10,3} = 10^3 = 1000$ maneras de distribuir los premios si estos son diferentes;

Caso2: Los premios son iguales, no importa el orden, son indistinguibles, pueden distribuirse de

$CR_{10,3} = C_{10+3-1,3} = C_{12,3} \frac{12!}{(12-3)!\cdot 3!} = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$ maneras de distribuir los premios si estos son iguales.

3. Las diagonales de un polígono se obtienen uniendo pares de vértices no adyacentes.

1. Obtener el número de diagonales del cuadrado y el hexágono.

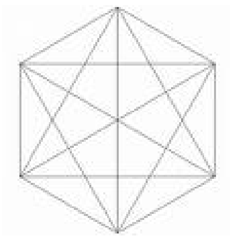
Comenzamos calculando el número de diagonales del cuadrado. Unimos dos puntos no adyacentes (tenemos cuatro vértices) pero solo habrá una recta que pase por los dos, **no importa el orden**, hay



$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2} = 6$ uniones posibles

De las 6 uniones posibles de dos vértices diferentes cualesquiera, **adyacentes o no**. Si de estas 6 parejas eliminamos las que corresponden a vértices adyacentes (tantas como el número de lados del cuadrado), quedaran $\text{Diagonales} = 6 - 4 = 2$ diagonales.

Procedemos del mismo modo con el hexágono, se obtienen



$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$

De las 15 uniones posibles de dos vértices diferentes cualesquiera, **adyacentes o no**. Si de estas 15 parejas eliminamos las que corresponden a vértices adyacentes (tantas como el número de lados del cuadrado), quedaran $\text{Diagonales} = 15 - 6 = 9$ diagonales.

4. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Ya que la fila es de 9 individuos en total, hay 4 posiciones pares (que deben ser ocupadas por las 4 mujeres) y 5 posiciones impares (para los 5 hombres).



Por lo tanto, pueden colocarse de:

$P_4 = 4! = 24$ mujeres (número de posibles colocaciones)
$P_5 = 5! = 120$ hombre (número de posibles colocaciones)
$\Rightarrow$ Total $= 24 \cdot 120 = 2880$ maneras

5. ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con las cifras 1,2,. . . ,9

1. Permitiendo repeticiones;

2. Sin repeticiones;

3. Si el último dígito ha de ser 1 y no se permiten repeticiones.

1. **Permiten repeticiones**, e **importa el orden** (son números no es lo mismo el número 1224 que el 2214)

$VR_{9,4} = 9^4 = 6561$ números posibles.

2. **No se permiten repeticiones**, e **importa el orden** igual que en el apartado. Por tanto, se pueden formar:

$$V_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024 \text{ números.}$$

3. Fijamos el último dígito (El número 1 está en la última posición) y, como no puede haber repeticiones (nos quedan ocho números para tres posiciones), se obtiene un total de

$$V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ números.}$$

6. En un grupo de 10 amigos, ¿cuántas distribuciones de sus fechas de cumpleaños pueden darse al año?

Considerando que el año tiene 365 días y que puede darse el caso de que varias personas cumplan en la misma fecha (**se permiten repeticiones** además **importa el orden son fechas**), el número de maneras distintas es:

$VR_{365,10} = 365^{10}$

7. ¿Cuántas letras de 5 signos con 3 rayas y 2 puntos podría tener el alfabeto Morse?

Dado que de los cinco elementos tan sólo hay dos diferentes (rayas y puntos) que se repiten 3 y 2 veces, respectivamente, tenemos permutaciones con repetición (se repiten los elementos), obteniendo así un total de

$PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ letras.

8. Cuando se arrojan simultáneamente 4 monedas,

1. ¿cuales son los resultados posibles que se pueden obtener?

2. ¿cuántos casos hay en que salgan 2 caras y 2 cruces?

Suponiendo que **las monedas son iguales**:

1. Dado que un mismo resultado individual (cara o cruz) **puede obtenerse en varias monedas a la vez** (repetición), y que las monedas no pueden distinguirse entre si (no importa el orden en la mesa se lee el resultado), existen

$CR_{2,4} = C_{2+4-1,4} = C_{5,4} \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$ resultados posibles.

Estos casos son: $E = \{CCCC, CCXX, CCCX, CXXX, XXXX\}$

2. Como las monedas se arrojan simultáneamente, **sólo habrá un caso** posible con 2 caras y 2 cruces.

Suponiendo que **las monedas son distintas**:

1. En este caso, puesto que se distinguen las monedas entre si (importa el orden) y en una tirada pueden haber varias con el mismo resultado individual (se permiten repeticiones), hay un total de

$VR_{2,4} = 2^4 = 16$ resultados posibles.

2. Se calcula el número de elementos con dos caras y dos cruces, tenemos elementos repetidos y tomamos todos ellos luego permutaciones con repetición:

$PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ resultados de dos caras y dos cruces.

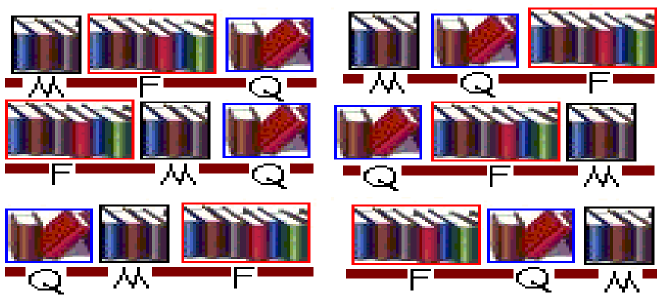
9. Cuatro libros de matemáticas, seis de física y dos de química han de ser colocados en una estantería ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si:

1. los libros de cada materia han de estar juntos;

2. Sólo los de matemáticas tienen que estar juntos?

Supongamos que **los libros de cada materia también son diferentes** (de distintos autores).

1. Consideramos cada conjunto de libros de una misma materia como una unidad. Entonces, hay $P_3 = 3! = 6$ ordenaciones posibles de las materias.



Además hay que considerar también las $P_4 = 4! = 24$ permutaciones de los libros de matemáticas, así como las $P_6 = 6! = 720$ de los libros de física y las $P_2 = 2! = 2$ de los de química. Se concluye así por el principio de la multiplicación que hay:

$\text{Total} = 6\cdot 24\cdot 720\cdot 2 = 207.360$ colocaciones distintas.

2. Consideremos **los cuatro libros de matemáticas como una unidad**. Se tendría entonces una unidad correspondiente a matemáticas, 6 unidades diferentes de física y dos unidades diferentes de química. Por lo tanto, existen:

$P_9 = 9! = 362880$ maneras de ordenar estas 9 unidades, y por cada una de ellas hay $P_4 = 4! = 24$ Ordenaciones posibles de los 4 libros de matemáticas, por lo que en total hay:

$\text{Total} = 362880 \cdot 24 = 8.709.120$ formas de colocar los libros.

Supongamos que **los libros de cada materia son idénticos**.

1. Consideremos cada conjunto de libros de una misma materia como una unidad. Nótese que entonces se tendría un total de 3 unidades, (tres clases de libros pero dentro de cada uno de ellos todos iguales) que pueden ordenarse de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

2. En este caso tendremos una unidad de matemáticas (todos tiene que estar juntos), además de 6 de física y 2 de química (idénticos en cada caso), Se tiene entonces un total de $PR_9^{1,6,2} = \dfrac{9!}{1! \cdot 6! \cdot 2!} = \dfrac{362880}{1440} = 252$ ordenaciones posibles

10. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuantas maneras puede elegirlas? ¿Y si las 4 primeras son obligatorias?

El orden en que elija las preguntas, que además no podrían repetirse, es irrelevante. Así, puede elegir las preguntas de $C_{10,7} = \dfrac{10!}{(10-7)! \cdot 7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ maneras.

Por otra parte, si las 4 primeras son obligatorias, debe escoger 3 preguntas entre las 6 restantes para completar las 7 necesarias, resultando un total de $C_{6,3} = \dfrac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ maneras.

11. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino?

Dado que **las estaciones de origen y destino no pueden coincidir** (no hay repetición), y además, dadas dos estaciones, **es importante saber si corresponden al principio o al final del trayecto** (importa el orden), hay un total de $V_{25,2}=\frac{25!}{(25-2)!}=\frac{25!}{23!}=25\cdot 24=600$ billetes diferentes.

12. Tres atletas toman parte en una competición. ¿De cuántas maneras podrán llegar a la meta? (Pueden llegar juntos)

Hay varias posibilidades:

- Si llegan los tres juntos, entonces sólo hay 1 posibilidad.
- Si llegan dos juntos, existen $C_{3,2}=\frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!}=\frac{3}{1}=3$ grupos de dos que llegan juntos, y $P_2=2!=2$ ordenaciones distintas del grupo de dos y el otro atleta, por lo que existen $\text{Total}=3\cdot 2=6$ posibilidades.

- Si llegan los tres por separado, existen $P_3=3!=6$ posibilidades.

Por lo tanto, pueden llegar a la meta de 13 maneras distintas.

13. En un hospital se utilizan cinco símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes, de manera que los dos primeros son letras y los tres últimos son dígitos. Suponiendo que hay 25 letras, ¿cuántas historias clínicas podrían hacerse si:

1. No hay restricciones sobre letras y números;

2. Las dos letras no pueden ser iguales.

1. Dado que es necesario tener en cuenta el orden de las dos letras escogidas y que además éstas pueden repetirse, resulta que hay $VR_{25,2}=25^2=625$ posibilidades para las letras. Se procede análogamente con el caso de los dígitos y se obtiene un total de $VR_{10,3}=10^3=1000$ posibilidades para los dígitos. El total de historias clínicas que pueden hacerse es, por lo tanto, $\text{Total}=625\cdot 1000=625.000$.

2. Se procede de forma similar al caso anterior, con la única diferencia de que ahora **las letras no pueden repetirse**. Así, hay $V_{25,2}=\frac{25!}{(25-2)!}=\frac{25!}{23!}=25\cdot 24=600$ posibilidades para las letras, y $VR_{10,3}=10^3=1000$ posibilidades para los dígitos, resultando que hay $\text{Total}=600\cdot 1000=600.000$ historias clínicas.